E.N.S.F.A.
1989

MATHEMATIQUES
(Durée : 3 heures, coefficient : 2)

EXERCICE 1 (4 points)

1° Résoudre l'équation : $x \in \mathbb{R}$ $(\sin x + \sqrt{3}\cos x)\sin 3x = 0$.

2° Résoudre l'inégalité : $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ $(\sin x + \sqrt{3}\cos x)\sin 3x < 0$.

---oOo---

EXERCICE 2 (3 points)

1° Démontrer qu'il existe des constantes A, B, C, D telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \frac{2x^3+2x-1}{x^3(x^2+1)} = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{Dx}{x^2+1}.$$

2° En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de l'intégrale

$$\int_1^3 \frac{2x^3+2x-1}{x^3(x^2+1)}dx.$$

---oOo---

PROBLEME (13 points)

I

Soit f_n les applications de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$f_o(x) = e^{-x}$ et, si $n \neq 0$ $f_n(x) = \frac{1}{n!}x^n e^{-x}$.

1° Etudier les variations des fonctions f_n.

2° Dans le repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on désigne par C_n la courbe d'équation $y = f_n(x)$. Indiquer sommairement l'allure de C_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

3° Soit $k \in \mathbb{N}^*$ un entier strictement positif.

a- Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$ les courbes C_n et C_{n+k} ont un point commun d'abscisse $x_{n,k}$ strictement positive.

b- Donner un encadrement simple de $x_{n,k}$.

4° Tracer avec soin sur un même graphique les arcs des courbes C_o, C_1, C_2, C_3, C_4 et C_5 tels que $0 \leqslant x \leqslant 5$.
(On choisira pour unités d'abscisse 3cm et d'ordonnée 16cm).

---oOo---

II

λ étant un réel positif, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $I_n(\lambda) = \int_0^\lambda f_n(x)dx$.

T.S.V.P.
Suite du sujet
au verso

1° Calculer $I_0(\lambda)$.

2° Trouver, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation entre I_{n+1} et I_n.

3° En déduire la valeur de $I_n(\lambda)$.

4° Déterminer l'aire A_n du domaine D_n limité par les arcs des courbes C_n et C_{n+1} avec $0 \leqslant x \leqslant x_{n,1}$.

---oOo---

III

1° Démontrer l'inégalité $\forall x > 0 \quad \ln(1+x) < x$.

Quelle est $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$?

2° En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} (1+\frac{1}{n})^n$.

3° On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad u_n = \dfrac{e^{-n} n^n}{n!}$.

a- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, comparer u_{n+1} et u_n.

b- Que peut-on dire de $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$?

4° Quelles propriétés de l'aire A_n peut-on déduire des résultats qui précèdent ?

---oOo---