Enoncé :

$u_n = \dfrac{\sin n - n}{2+\sqrt{n}}$

Comparer u_n et $-\sqrt{n}+2$.
En déduire la limite de u_n .

Résolution :

$$u_n - (-\sqrt{n}+2) = \frac{\sin n - n}{2+\sqrt{n}} - \frac{(2-\sqrt{n})(2+\sqrt{n})}{(2+\sqrt{n})}$$

$$u_n - (-\sqrt{n}+2) = \frac{\sin n - n - (4-n)}{(2+\sqrt{n})}$$

$$u_n - (-\sqrt{n}+2) = \frac{\sin n - 4}{(2+\sqrt{n})}$$

Encadrons le numérateur et le dénominateur du quotient obtenu.
D'une part :
$-1 \leq \sin n \leq 1$
$-5 \leq \sin n - 4 \leq -3$
donc $\sin n - 4 < 0$

D'autre part :
$\sqrt{n} \geq 0$
$2+\sqrt{n} \geq 2$
donc $2+\sqrt{n} > 0$

Le numérateur et le dénominateur sont respectivement négatif et positif, strictement.
Le quotient est donc négatif.

On en déduit que $u_n - (-\sqrt{n}+2) \leq 0$ et donc que $u_n \leq -\sqrt{n}+2$

Comme $\lim (-\sqrt{n}+2) = -\infty$, alors $\lim u_n = -\infty$