

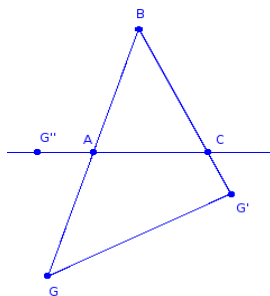
Considérons un triangle ABC quelconque, et trois barycentres G, G' et G'', obéissant aux caractéristiques suivantes, m étant un réel différent de  $\frac{-5}{3}$  :

$$G = \{(A; 2); (B; -1)\} \quad \text{équivalent à : } 2\vec{GA} - \vec{GB} = \vec{0} \quad (1)$$

$$G' = \{(B; -1); (C; 4)\} \quad \text{équivalent à : } -\vec{G'B} + 4\vec{G'C} = \vec{0} \quad (2)$$

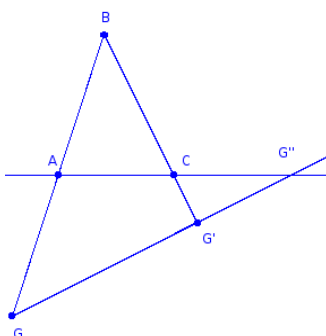
$$G'' = \{(A; 3m-1); (C; 4)\} \quad \text{équivalent à : } (3m-1)\vec{G''A} + 4\vec{G''C} = \vec{0} \quad (3)$$

Ces données nous permettent de tracer le schéma suivant, avec G'' évoluant sur la droite (AC) au gré de la valeur prise par m.



La question posée dans le problème est : quelle valeur choisir pour m afin que G, G' et G'' soient alignés ?

Comme ceci...



En principe, la question n'est pas très compliquée. Il suffit de trouver un réel k permettant de vérifier la relation :

$$\vec{GG''} = k\vec{GG'}$$

puis de déterminer la valeur de m correspondante.

Dans la pratique, l'utilisation des relations vectorielles exposées ci-dessus n'est pas chose aisée.

En effet, en comparant 2 à 2 ces relations, on n'observe pas de façon évidente de coefficients de nature à permettre l'expression des vecteurs  $\vec{GG''}$  et  $\vec{GG'}$  en fonction d'une même combinaison de vecteurs connus.

## Résolution

Dans une telle situation, il est préférable de se reporter à un repère, constitué à partir de tout ou partie des points « de base » (ici A, B et C).

Pour chacun des autres points (ici G, G' et G''), il faut définir un vecteur, dont l'origine serait l'un des points de base, toujours le même.

Une fois ce vecteur choisi, il convient de l'exprimer en fonction d'une combinaison de vecteurs définis uniquement à partir des points de base.

Enfin, l'expression des vecteurs recherchés est désormais grandement facilitée.

On peut procéder en travaillant uniquement sur des relations vectorielles (I) ou en définissant explicitement un repère, dans lequel chaque point sera défini par ses coordonnées (II).

### I) Utilisation des seules relations vectorielles

$$(1) \text{ donne } \begin{aligned} 2\vec{GA} - \vec{GA} - \vec{AB} &= \vec{0} \\ \vec{GA} - \vec{AB} &= \vec{0} \end{aligned}$$

$$\vec{AG} = \vec{BA} \quad \text{et} \quad \vec{GA} = \vec{AB} \quad (4)$$

$$(2) \text{ donne } -\vec{G'A} - \vec{AB} + 4\vec{G'A} + 4\vec{AC} = \vec{0}$$

$$3\vec{G'A} - \vec{AB} + 4\vec{AC} = \vec{0}$$

$$3\vec{AG}' = -\vec{AB} + 4\vec{AC}$$

$$\vec{AG}' = \frac{-1}{3}\vec{AB} + \frac{4}{3}\vec{AC} \quad (5)$$

$$(3) \text{ donne } (3m-1)\vec{G''A} + 4\vec{G''A} + 4\vec{AC} = \vec{0}$$

$$(3m+3)\vec{G''A} + 4\vec{AC} = \vec{0}$$

$$(3m+3)\vec{AG}'' = 4\vec{AC}$$

$$\vec{AG}'' = \frac{4}{3m+3}\vec{AC} \quad (6)$$

Par suite, l'addition des relations (4) et (5) donne :

$$\vec{GA} + \vec{AG}' = \vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{4}{3}\vec{AC}$$

$$\text{soit : } \vec{GG}' = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{4}{3}\vec{AC}$$

Et l'addition des relations (4) et (6) permet d'écrire :

$$\vec{GA} + \vec{AG}'' = \vec{AB} + \frac{4}{3m+3}\vec{AC}$$

$$\vec{GG}'' = \vec{AB} + \frac{4}{3m+3}\vec{AC}$$

On relève ensuite que la proportionnalité entre les vecteurs  $\vec{GG}''$  et  $\vec{GG}'$  n'est possible que si

$$\vec{GG}'' = \frac{3}{2}\vec{GG}' \quad \text{car} \quad \frac{3}{2} \times \frac{2}{3}\vec{AB} = \vec{AB}$$

dont il découle que :

$$\frac{3}{2} \times \frac{4}{3}\vec{AC} = \frac{4}{3m+3}\vec{AC}$$

$$\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{4}{3m+3}$$

$$\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{1}{m+1} \times \frac{4}{3}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{m+1}$$

$$m+1 = \frac{2}{3}$$

$$m = \frac{-1}{3}$$

Dans ces conditions,  $G''$  devient le barycentre du système  $\{(A; -1); (C; 2)\}$ , autrement dit  $G''$  est le symétrique de A par rapport à C, ce qui se vérifie sur notre dessin de départ.

## II) Utilisation d'un repère

Dans le repère  $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$ , on peut caractériser les points A, B, C, G, G' et G'' par des coordonnées.

Nous ferons ensuite de même pour les vecteurs  $\vec{GG''}$  et  $\vec{GG'}$ .

$$\begin{array}{ccc}
 A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 G \begin{pmatrix} \frac{2 \times x_A - 1 \times x_B}{2-1} \\ \frac{2 \times y_A - 1 \times y_B}{2-1} \end{pmatrix} & G \begin{pmatrix} \frac{2 \times 0 - 1 \times 1}{2-1} \\ \frac{2 \times 0 - 1 \times 0}{2-1} \end{pmatrix} & G \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 G' \begin{pmatrix} \frac{-1 \times x_B + 4 \times x_C}{-1+4} \\ \frac{-1 \times y_B + 4 \times y_C}{-1+4} \end{pmatrix} & G' \begin{pmatrix} \frac{-1 \times 1 + 4 \times 0}{-1+4} \\ \frac{-1 \times 0 + 4 \times 1}{-1+4} \end{pmatrix} & G' \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \\
 G'' \begin{pmatrix} \frac{(3m-1) \times x_A + 4 \times x_C}{3m-1+4} \\ \frac{(3m-1) \times y_A + 4 \times y_C}{3m-1+4} \end{pmatrix} & G'' \begin{pmatrix} \frac{(3m-1) \times 0 + 4 \times 0}{3m-1+4} \\ \frac{(3m-1) \times 0 + 4 \times 1}{3m-1+4} \end{pmatrix} & G'' \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{3m+3} \end{pmatrix} \\
 \vec{GG'} \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} - (-1) \\ \frac{4}{3} - 0 \end{pmatrix} & \vec{GG'} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \\
 \vec{GG''} \begin{pmatrix} 0 - (-1) \\ \frac{4}{3m+3} - 0 \end{pmatrix} & \vec{GG''} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{3m+3} \end{pmatrix}
 \end{array}$$

On conclut ici encore que la proportionnalité entre les vecteurs  $\vec{GG''}$  et  $\vec{GG'}$  n'est possible que si  $\vec{GG''} = \frac{3}{2} \vec{GG'}$  et enfin que  $m = \frac{-1}{3}$ .