Soit A tel que $z_A = -5+2i$ dans un plan rapporté à un repère orthonormal direct.
Trouver B pour que OAB soit équilatéral.

Appelons z l'affixe de B.
OAB équilatéral entraîne : $OB = AB = OA$
Soit : $|z| = |z - z_A| = |z_A|$
$|z| = |z+5-2i| = \sqrt{29}$
Posons : $z = x+iy$
L'égalité devient : $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x+5)^2+(y-2)^2} = \sqrt{29}$
D'où :

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 29 \\ x^2+y^2 = (x+5)^2+(y-2)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 29 \\ x^2+y^2 = x^2+10x+25+y^2-4y+4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 29 \\ 10x = 4y-29 \end{cases}$$

On peut d'ores et déjà affirmer que les images des solutions sont les intersections d'un cercle et d'une droite, donc très probablement au nombre de deux.

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 29 \\ x = \frac{2}{5}y - \frac{29}{10} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{2}{5}y - \frac{29}{10}\right)^2 + y^2 = 29 \\ x = \frac{2}{5}y - \frac{29}{10} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4}{25}y^2 - 2\times\frac{2}{5}y\times\frac{29}{10} + \left(\frac{29}{10}\right)^2 + y^2 = 29 \\ x = \frac{2}{5}y - \frac{29}{10} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16y^2 - 232y + 841 + 100y^2 = 2900 \\ x = \frac{2}{5}y - \frac{29}{10} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 116y^2 - 232y - 2059 = 0 \\ x = \frac{2}{5}y - \frac{29}{10} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4y^2 - 8y - 71 = 0 \\ x = \frac{2}{5}y - \frac{29}{10} \end{cases}$$

Pour la première équation :
$\Delta = 8^2 + 4\times4\times71 = 1200 = (20\sqrt{3})^2$

$$\begin{cases} y = \frac{8-20\sqrt{3}}{2\times4} \text{ ou } y = \frac{8+20\sqrt{3}}{2\times4} \\ x = \frac{2}{5}y - \frac{29}{10} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=1-\frac{5}{2}\sqrt{3} \text{ ou } y=1+\frac{5}{2}\sqrt{3} \\ x=\frac{2}{5}y-\frac{29}{10} \end{cases}$$

Soit enfin :

$$\begin{cases} y_B=1-\frac{5}{2}\sqrt{3} \\ x_B=\frac{2}{5}\times(1-\frac{5}{2}\sqrt{3})-\frac{29}{10}=\frac{4}{10}-\sqrt{3}-\frac{29}{10}=-\frac{5}{2}-\sqrt{3} \end{cases}$$

et :

$$\begin{cases} y_B'=1+\frac{5}{2}\sqrt{3} \\ x_B'=\frac{2}{5}\times(1+\frac{5}{2}\sqrt{3})-\frac{29}{10}=\frac{4}{10}+\sqrt{3}-\frac{29}{10}=-\frac{5}{2}+\sqrt{3} \end{cases}$$

On trouve alors : $z_B=-\frac{5}{2}-\sqrt{3}+i(1-\frac{5}{2}\sqrt{3})$

et : $z_B'=-\frac{5}{2}+\sqrt{3}+i(1+\frac{5}{2}\sqrt{3})$