$$f(x)=x\left(\frac{1}{6}x+\frac{1}{9}\right)e^{-x}$$

1) Justifier que f est dérivable 2 fois sur $\mathbb{R}$

2) Démontrer que $f''(x)-f'(x)-2f(x)=-xe^{-x}$

f est composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable.
Chacune de ces fonctions dérivées est-elle même dérivable sur $\mathbb{R}$
donc f est dérivable 2 fois sur $\mathbb{R}$.

Résolution :

$$f(x)=x\left(\frac{1}{6}x+\frac{1}{9}\right)e^{-x} \quad \text{équivaut à : } f(x)=\left(\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{9}x\right)e^{-x}$$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}\right)e^{-x}-\left(\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{9}x\right)e^{-x}$$

$$f'(x)=\left(-\frac{1}{6}x^2+\frac{2}{9}x+\frac{1}{9}\right)e^{-x}$$

puis :

$$f''(x)=\left(-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}\right)e^{-x}-\left(-\frac{1}{6}x^2+\frac{2}{9}x+\frac{1}{9}\right)e^{-x}$$

$$f''(x)=\left(\frac{1}{6}x^2-\frac{5}{9}x+\frac{1}{9}\right)e^{-x}$$

par suite :

$$f''(x)-f'(x)-2f(x)=\left(\frac{1}{6}x^2-\frac{5}{9}x+\frac{1}{9}\right)e^{-x}-\left(-\frac{1}{6}x^2+\frac{2}{9}x+\frac{1}{9}\right)e^{-x}-2\left(\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{9}x\right)e^{-x}$$

$$f''(x)-f'(x)-2f(x)=\left(\frac{1}{6}x^2-\frac{5}{9}x+\frac{1}{9}+\frac{1}{6}x^2-\frac{2}{9}x-\frac{1}{9}-\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{9}x\right)e^{-x}$$

$$f''(x)-f'(x)-2f(x)=\left(-\frac{9}{9}x\right)e^{-x}$$

$$f''(x)-f'(x)-2f(x)=-x\,e^{-x}$$