Rappel des éléments essentiels de l'énoncé et synthèse des premières réponses :

On associe à tout point M du plan d'affixe z un point M' d'affixe z' tel que : $z'=\frac{iz}{z-i}$

Nous avons démontré partant de l'énoncé que l'écriture algébrique de z' peut être exprimée sous la forme : $x'+iy'=\frac{-x}{x^2+(y-1)^2}+i\frac{x^2+y^2-y}{x^2+(y-1)^2}$

et que par conséquent, z' est réel si et seulement si M appartient à E, qui est le cercle de centre Ω d'affixe $\frac{i}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$, privé du point A d'affixe i.

Nous avons également démontré que tout point M d'affixe $z=\frac{i+e^{ix}}{2}$ est compris dans E.

Question : démontrer que pour $z=\frac{i+e^{ix}}{2}$ on trouve : $z'=\frac{\cos x}{\sin x-1}$

Allons-y.

Démarche initiée en séance :

$$z'=\frac{i\frac{(i+e^{ix})}{2}}{\frac{i+e^{ix}}{2}-i}=\frac{\frac{1}{2}(-1+ie^{ix})}{\frac{1}{2}(i+e^{ix}-2\mathrm{i})}=\frac{-1+ie^{ix}}{-i+e^{ix}}$$

$$z'=\frac{-1-\sin x+i\cos x}{\cos x+i(\sin x-1)}$$

$$z'=\frac{(-1-\sin x+i\cos x)(\cos x-i(\sin x-1))}{\cos^2 x+(\sin x-1)^2}$$

$$z'=\frac{(-1-\sin x)\cos x+\cos x(\sin x-1)+i[\cos^2 x+(\sin x+1)(\sin x-1)]}{\cos^2 x+\sin^2 x-2\sin x+1}$$

$$z'=\frac{-2\cos x+i(\cos^2 x+\sin^2 x-1)}{2-2\sin x}$$

$$z'=\frac{-2\cos x}{2-2\sin x}$$

$$z'=\frac{\cos x}{\sin x-1}$$

QED

Plus simple :

Nous avons déjà démontré que pour tout M d'affixe $z=\frac{i+e^{ix}}{2}$ on a M' compris dans E.

Nous avons donc z' réel, autrement dit $z'=x'$

soit : $z'=\frac{-x}{x^2+(y-1)^2}$

Or on peut écrire z sous sa forme algébrique : $z=\frac{1}{2}\cos x+i\frac{1+\sin x}{2}$

Et ainsi z' devient : $z'=\frac{-\frac{1}{2}\cos x}{\left(\frac{1}{2}\cos x\right)^2+\left(\frac{1+\sin x}{2}-1\right)^2}$

$$z'=\frac{-\frac{1}{2}\cos x}{\frac{1}{4}\cos^2 x+\left(\frac{\sin x}{2}-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$z'=\frac{-\frac{1}{2}\cos x}{\frac{1}{4}\cos^2 x+\frac{1}{4}\sin^2 x-\frac{\sin x}{2}+\frac{1}{4}}$$

$$z'=\frac{-\frac{1}{2}\cos x}{\frac{1}{4}-\frac{\sin x}{2}+\frac{1}{4}}$$

$$z'=\frac{-\frac{1}{2}\cos x}{\frac{1}{2}-\frac{\sin x}{2}}$$

$$z'=\frac{-\cos x}{1-\sin x}$$

$$z'=\frac{\cos x}{\sin x-1}$$

QED