Soit un triangle quelconque ABC et A', B', C' les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.
Soit deux similitudes planes σ_1 et σ_2, de centres respectifs B et C, de rapports respectifs $\sqrt{(2)}$ et $\frac{1}{\sqrt{(2)}}$, et toutes deux d'angle $-\frac{\pi}{4}$.
Démontrer que $\sigma_2 o \sigma_1$ est une rotation de centre A' et d'un angle à déterminer.

Résolution :

Nous exprimerons σ_1, σ_2, puis $\sigma_2 o \sigma_1$ en écriture complexe.
Soit b l'affixe de B et c l'affixe de C. Notons d'ores et déjà que A' a pour affixe $\frac{b+c}{2}$.
Nous tenterons donc de la faire apparaître.

σ_1: $\quad z'=b+\sqrt{(2)}e^{-i\frac{\pi}{4}}(z-b)$

σ_2: $\quad z''=c+\frac{1}{\sqrt{(2)}}e^{-i\frac{\pi}{4}}(z'-c)$

$\sigma_2 o \sigma_1$: $\quad z''=c+\frac{1}{\sqrt{(2)}}e^{-i\frac{\pi}{4}}(b+\sqrt{(2)}e^{-i\frac{\pi}{4}}(z-b)-c)$

$$z''=c+\frac{1}{\sqrt{(2)}}e^{-i\frac{\pi}{4}}b+\frac{1}{\sqrt{(2)}}e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{(2)}e^{-i\frac{\pi}{4}}(z-b)-\frac{1}{\sqrt{(2)}}e^{-i\frac{\pi}{4}}c$$
$$z''=c+\frac{1}{\sqrt{(2)}}e^{-i\frac{\pi}{4}}b+e^{-i\frac{\pi}{2}}(z-b)-\frac{1}{\sqrt{(2)}}e^{-i\frac{\pi}{4}}c$$
$$z''=c+\frac{1}{\sqrt{(2)}}e^{-i\frac{\pi}{4}}(b-c)+e^{-i\frac{\pi}{2}}(z-b)$$
$$z''=c+\frac{1}{\sqrt{(2)}}(\frac{1}{\sqrt{(2)}}-\frac{i}{\sqrt{(2)}})(b-c)-i(z-b)$$
$$z''=c+(\frac{1}{2}-\frac{i}{2})(b-c)-i(z-b)$$
$$z''=c+\frac{b}{2}-\frac{i}{2}b-\frac{c}{2}+\frac{i}{2}c-iz+ib$$
$$z''=\frac{c}{2}+\frac{b}{2}+\frac{i}{2}b+\frac{i}{2}c-iz$$
$$z''=\frac{b+c}{2}+i\frac{b+c}{2}-iz$$
$$z''-\frac{b+c}{2}=-i(z-\frac{b+c}{2})$$
$$z''-\frac{b+c}{2}=e^{-i\frac{\pi}{2}}(z-\frac{b+c}{2})$$

$\sigma_2 o \sigma_1$ est donc une rotation de centre A' et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.