

Nous avons un triangle quelconque ABC , avec I défini comme étant le barycentre de $(A; 3)$, $(B; 2)$ et $(C; 1)$.

On a déjà démontré que si E est le barycentre de $(B; 2)$ et $(C; 1)$, alors I est le milieu de $[AE]$. De même, si D est le barycentre de $(A; 3)$ et $(B; 2)$, alors I est le barycentre de $(D; 5)$ et $(C; 1)$. Le problème pose également que l'emplacement de A varie dans le plan, mais que la distance AE est fixe. Nous appellerons R cette dernière, les différentes occurrences de A décrivant donc un cercle de centre E et de rayon R .

Nous avons également vu que le lieu géométrique de I est un cercle de centre E et de rayon $\frac{R}{2}$.

D sera pour la construction l'intersection de (AB) et (IC) , ce qui est je crois la formulation du problème.

Résolution

Posons un vecteur \vec{j} tel que $\|\vec{j}\| = EC$ et $(\vec{EC}; \vec{j}) = +\frac{\pi}{2}$ [2π].

$(E; \vec{EC}; \vec{j})$ est donc un repère orthonormé direct, dans lequel on peut déterminer les couples de

coordonnées suivants : $E \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Le lieu géométrique de A a donc pour équation : $x^2 + y^2 = R^2$

et donc : $A \begin{pmatrix} x_A \\ \sqrt{R^2 - x_A^2} \end{pmatrix}$ ou $A \begin{pmatrix} x_A \\ -\sqrt{R^2 - x_A^2} \end{pmatrix}$.

Comme D est le barycentre de $(A; 3)$ et $(B; 2)$, on a :

$$D \begin{pmatrix} \frac{3}{5}x_A + \frac{2}{5}x_B \\ \frac{3}{5}y_A + \frac{2}{5}y_B \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad D \begin{pmatrix} \frac{3}{5}x_A - \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5}\sqrt{R^2 - x_A^2} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad D \begin{pmatrix} \frac{3}{5}x_A - \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5}\sqrt{R^2 - x_A^2} \end{pmatrix}$$

Dans les deux cas, on observe que :

$$\left(x_D + \frac{1}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}x_A^2 \quad \text{et} \quad y_D^2 = \frac{9}{25}(R^2 - x_A^2)$$

$$\text{soit : } \left(x_D + \frac{1}{5}\right)^2 + y_D^2 = \frac{9}{25}R^2$$

Conclusion : le lieu géométrique de D est le cercle de centre $\Omega \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$ et de rayon $\frac{3}{5}EA$.