$$\lim_{x\to+\infty} ex+1-(\ln x)^2$$

$\lim_{x\to+\infty} ex=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} -(\ln x)^2=-\infty$

Nous sommes donc en présence d'une forme indéterminée.
Comme nous pressentons que la limite de la fonction affine prendra l'ascendant sur la fonction logarithmique, il convient de factoriser par x afin de mettre en évidence une somme qui tendra vers une limite finie.

$\lim_{x\to+\infty} ex+1-(\ln x)^2=\lim_{x\to+\infty} x[e+\frac{1}{x}-\frac{(\ln x)^2}{x}]$

x tend vers l'infini.

e est une valeur réelle positive.

$\frac{1}{x}$ tend vers 0.

Traitons individuellement $\lim_{x\to+\infty} \frac{-(\ln x)^2}{x}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{-(\ln x)^2}{x} &= \lim_{x\to+\infty} -\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2\\ &= \lim_{x\to+\infty} -4\times\frac{1}{4}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2\\ &= \lim_{x\to+\infty} -4\left(\frac{\frac{1}{2}\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2\\ &= \lim_{x\to+\infty} -4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2\\ &= \lim_{x\to+\infty} -\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2\end{aligned}$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}=0$, on déduit par composition :

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=0$

puis : $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2=0$

et enfin : $\lim_{x\to+\infty} -\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2=0$

d'où : $\lim_{x\to+\infty} \frac{-(\ln x)^2}{x}=0$

dont on déduit que : $\lim_{x\to+\infty} e+\frac{1}{x}-\frac{(\ln x)^2}{x}=e$

et donc par multiplication : $\lim_{x\to+\infty} ex+1-(\ln x)^2=\lim_{x\to+\infty} x[e+\frac{1}{x}-\frac{(\ln x)^2}{x}]=+\infty$