EXERCICE 4 : (5 points)

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1) a) Déterminer l'ensemble des couples (x, y) de nombres entiers relatifs, solution de l'équation (E) : $8x - 5y = 3$.

b) Soit m un nombre entier relatif tel qu'il existe un couple (p, q) de nombres entiers vérifiant $m = 8p + 1$ et $m = 5q + 4$.
Montrer que le couple (p, q) est solution de l'équation (E) et en déduire que $m \equiv 9$ (modulo 40).

c) Déterminer le plus petit de ces nombres entiers m supérieurs à 2000.

2) Soit n un nombre entier naturel.

a) Démontrer que pour tout nombre entier naturel k on a : $2^{3k} \equiv 1$ (modulo 7).

b) Quel est le reste dans la division euclidienne de 2^{2009} par 7 ?

3) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Soient a et b deux nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec $a \neq 0$.
On considère le nombre $N = a \times 10^3 + b$. On rappelle qu'en base 10 ce nombre s'écrit sous la forme $N = \overline{a00b}$
On se propose de déterminer parmi ces nombres entiers naturels N ceux qui sont divisibles par 7.

a) Vérifier que $10^3 \equiv -1$ (modulo 7).

b) En déduire tous les nombres entiers N cherchés.