Baccalauréat 2009
métropole
Série S.

Corrigé succinct sous toutes réserves

élèves n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Exercice 1

1.a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 6$

$= \frac{1}{3} u_n + 4 - 6$

$= \frac{1}{3}(v_n + 6) - 2$

$= \frac{1}{3} v_n + \frac{6}{3} - 2$

$v_{n+1} = \frac{1}{3} v_n$

(v_n) est une suite géométrique de raison $1/3$ et de 1er terme v_0 tel que :

$v_0 = u_0 - 6$

$= 1 - 6 = -5$

b/ $v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = -5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$u_n = v_n + 6 = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$

c/ * $\forall n \in \mathbb{N}$ $\left(\frac{1}{3}\right)^n > 0$ donc $-5\left(\frac{1}{3}\right)^n < 0$

donc $u_n < 6$

* $u_{n+1} - u_n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + 6 - \left(-5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6\right)$

$= -5\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + 5\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$= 5\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(-\frac{1}{3} + 1\right) = \frac{10}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$= 10 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} > 0$

(u_n) est donc croissante, comme elle est majorée, elle est convergente.

et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 6$

2)a/ $n\, w_n = (n+1)\, w_{n-1} + 1$

pour $n = 10$; $10\, w_{10} = 11\, w_9 + 1$

$= 11 \times 19 + 1$

$= 209 + 1$

$= 210$

$\Leftrightarrow w_{10} = 21$

b/ Conjecture : w_n est la suite des nbs impairs.

$P_n : w_n = 2n+1$

Démonstration par récurrence

. Initialisation : $w_0 = 2 \times 0 + 1 = 1$ P_0 vraie

- Hérédité si $\exists n$ fixé tel que P_n vraie, démontrons que P_{n+1} est vraie

d'après l'Énoncé : $(n+1)\, w_{n+1} = (n+2)\, w_n + 1$

$$\Leftrightarrow w_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} w_n + \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{n+1+1}{n+1} w_n + \frac{1}{n+1}$$

$$= w_n + \frac{1}{n+1} w_n + \frac{1}{n+1}$$

$$= w_n + \frac{1}{n+1}(w_n + 1)$$

$$= 2n+1 + \frac{1}{n+1}(2n+1+1)$$

$$= 2n+1 + \frac{1}{n+1}(2n+2)$$

$$= 2n+1 + 2$$

$w_{n+1} = 2(n+1) + 1$ Hérédité démontrée.

Donc P_n vraie $\forall n \in \mathbb{N}$

et (w_n) est une suite arithmétique de 1er terme $w_0 = 1$ et de raison 2.

$w_{2009} = 2 \times 2009 + 1 = 4018 + 1 = 4019$

Exercice 2 $\quad f(x) = \ln(1 + x e^{-x})$ sur $[0 ; +\infty[$

Partie I

1) $\lim\limits_{X \to -\infty} X e^{X} = 0$ (théorème de croissance comparée)

$\lim\limits_{x \to +\infty} (-x) = -\infty$

donc par composition $\lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-x} = 0$

puis $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + x e^{-x} = 1$

et $\lim\limits_{X \to 1} \ln X = 0$

donc par composition $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + x e^{-x}) = 0$

soit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

2) $f'(x) = \dfrac{e^{-x} + x(-e^{-x})}{1 + x e^{-x}} = \dfrac{e^{-x}(1-x)}{1 + x e^{-x}}$ $\quad \left((\ln u)' = \dfrac{u'}{u}\right)$

$\forall x \in [0 ; +\infty[\quad e^{-x} > 0$

et $1 + x e^{-x} > 0$

donc le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x$

3)

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\ln(1 + 1/e)$	$\searrow$	0

Partie II $\quad A(\lambda) = \int_0^\lambda f(x)\,dx$

1) a/ il fallait hachurer la zone comprise entre l'axe des abscisses, la courbe et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \lambda$

b/ D'après le tableau de variation

$f(x) \leq f(1) \quad \forall x \in [0 ; +\infty[$

donc $\int_0^\lambda f(x)\,dx \leq \int_0^\lambda f(1)\,dx$ (théorème de comparaison)

soit $A(\lambda) \leq f(1) \int_0^\lambda dx$

avec $\int_0^\lambda dx = [x]_0^\lambda = \lambda - 0$ $\quad$ soit $A(\lambda) \leq \lambda f(1)$

2 a/ $\int_0^\lambda x e^{-x} dx$

$$u(x) = x \qquad u'(x) = 1$$
$$v'(x) = e^{-x} \qquad v(x) = -e^{-x}$$

$$\int_0^\lambda x e^{-x} dx = \left[-x e^{-x}\right]_0^\lambda - \int_0^\lambda (-e^{-x}) dx$$
$$= \left[-x e^{-x}\right]_0^\lambda - \left[e^{-x}\right]_0^\lambda$$
$$= \left[-e^{-x}(x+1)\right]_0^\lambda$$
$$= -e^{-\lambda}(\lambda+1) + e^{-0}(0+1)$$
$$= 1 - e^{-\lambda}(\lambda+1)$$

b/ en admettant $\ln(1 + x e^{-x}) \leq x e^{-x}$

on en déduit $\int_0^\lambda \ln(1+x e^{-x}) dx \leq \int_0^\lambda x e^{-x} dx$

soit $A(\lambda) \leq 1 - e^{-\lambda}(\lambda+1)$

$A(\lambda) \leq 1 - \lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda}$ CQFD

3) 1ère méthode

$$A(5) \leq 5 f(1)$$
$$A(5) \leq 1{,}57$$

2è méthode

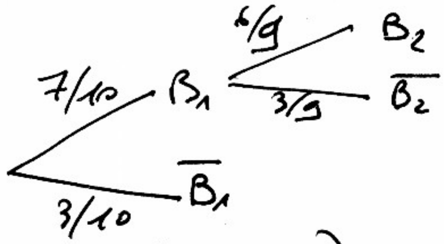
$$A(5) \leq -5e^{-5} - e^{-5} + 1 = 1 - 6e^{-5}$$
$$A(5) \leq 0{,}96$$

La 2è méthode est une approche plus fine.

Exercice 3 I)

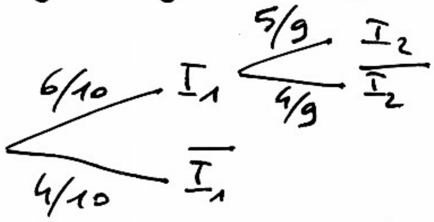
$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!}$$
$$= \frac{p(n-1)!}{p(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!(n-p)}{p!(n-p-1)!(n-p)} = \frac{p(n-1)! + (n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!}$$
$$= \frac{n(n-1)!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}$$

II 1 a)



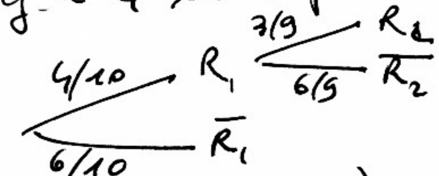
$$p(A) = p(B_1 \cap B_2) = p(B_1) \times p_{B_1}(B_2)$$
$$= \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{7}{15}$$

b/ Il y a 6 jetons impairs : blanc 1, 3, 5 et 7
noir 1, 3



$$p(B) = p(I_1 \cap I_2) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$$

c/ soit $C = A \cap B$ l'événement "obtenir 2 jetons blancs et impairs"
Il y a 4 issues possibles au 1er tirage.

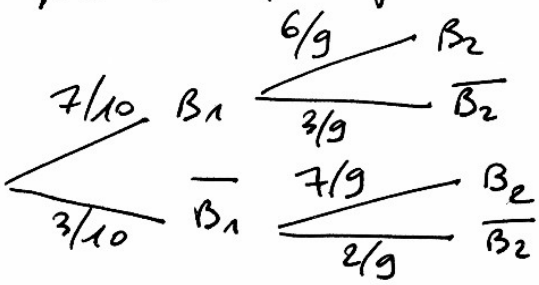


$$p(C) = p(R_1 \cap R_2) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$$

or $p(A) \times p(B) = \frac{7}{15} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{45} \neq p(A \cap B)$

donc A et B ne sont pas indépendants.

2) a/



$p(X=2) = p(B_1 \cap B_2) = \frac{7}{15}$

$p(X=1) = p(B_1 \cap \overline{B_2}) + p(\overline{B_1} \cap B_2)$
$= 7/10 \times 1/3 + 3/10 \times 7/9$
$= 7/30 + \frac{7}{30} = \frac{7}{15}$

$p(X=0) = p(\overline{B_1} \cap \overline{B_2})$
$= 3/10 \times 2/9 = 1/15$

$X=x_i$	0	1	2
p_i	$1/15$	$7/15$	$7/15$

$$E(X) = 0\times\frac{1}{15} + 1\times\frac{7}{15} + 2\times\frac{7}{15}$$

$$E(X) = \frac{7}{5}$$

Exercice 4 non spé

1) a/ $M(z)$; $M_1\left(\frac{1}{z}\right)$; $M' = m[MM_1]$

on a $z_{\overrightarrow{OM}} \times z_{\overrightarrow{OM_1}} = z \times \frac{1}{z} = 1$

d'où $OM \times OM_1 = |z_{\overrightarrow{OM}}| \times |z_{\overrightarrow{OM_1}}| = |z_{\overrightarrow{OM}} \times z_{\overrightarrow{OM_1}}|$

$= |1| = 1$

d'autre part : $(\vec{u};\overrightarrow{OM_1}) = \arg z_{\overrightarrow{OM_1}} = \arg\frac{1}{z} = -\arg z$

$= -(\vec{u};\overrightarrow{OM})\ [2\pi]$

car $(\vec{u};\overrightarrow{OM}) = \arg z\ [2\pi]$

2) a/ $M' = m[MM_1]$ donc $z' = \frac{z+z_1}{2}$

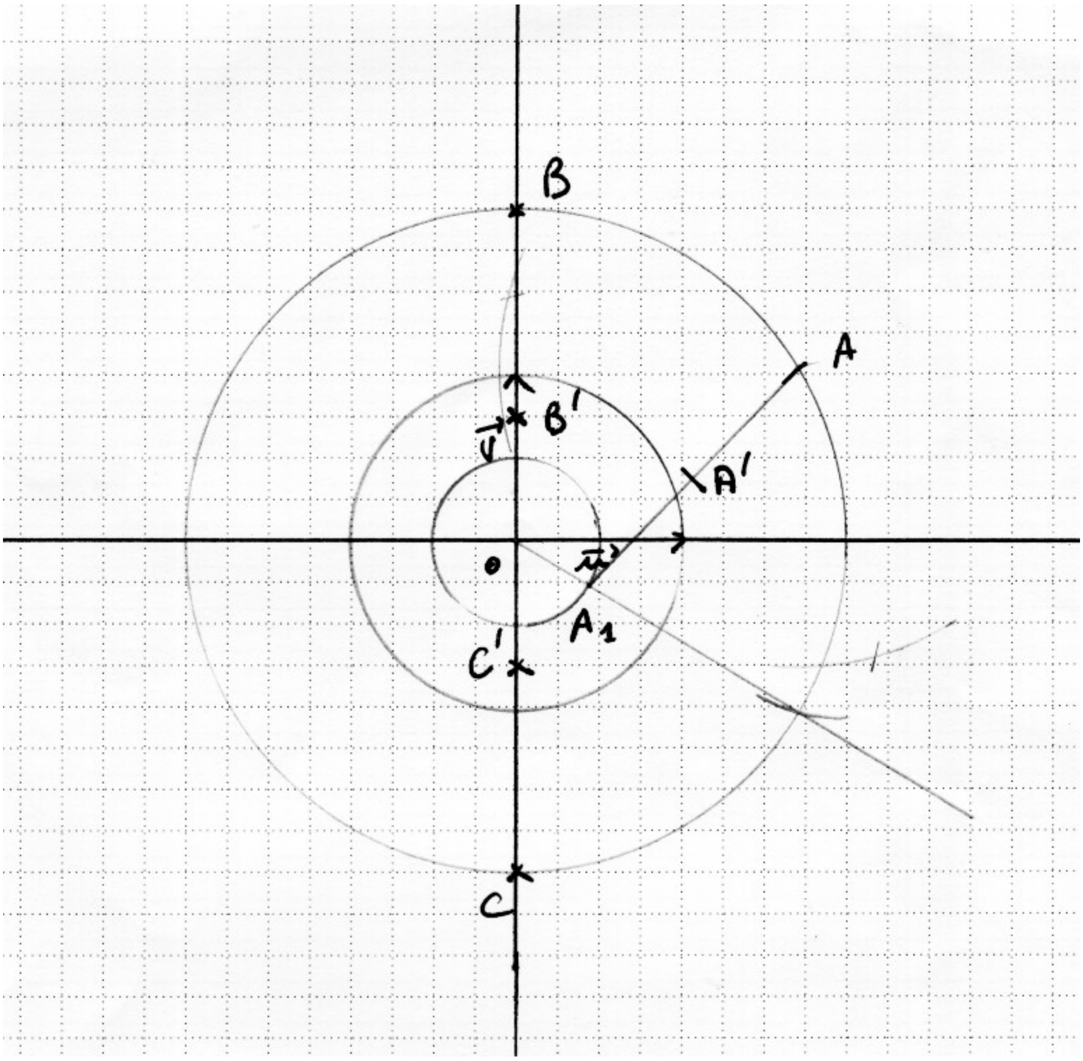
$= \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

b/ $B(2i) \longmapsto B'(b')$

$b' = \frac{1}{2}\left(2i + \frac{1}{2i}\right) = \frac{1}{2}\left(2i - \frac{i}{2}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{3}{2}i = \frac{3}{4}i$

$C(-2i) \longmapsto C'(c')$

$c' = \frac{1}{2}\left(-2i + \frac{1}{-2i}\right) = \frac{1}{2}\left(-2i + \frac{i}{2}\right) = -\frac{3}{4}i$



3) $M' = M \iff z' = z$

$\iff \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = z$

$\iff z + \frac{1}{z} = 2z \iff z = \frac{1}{z}$

$\iff z^2 = 1 \iff z = 1$ ou $z = -1$

L'ensemble recherché est composé de 2 éléments, les points d'affixes respectives 1 et -1.

4) $M \in \mathcal{C}(O;1)$ alors $z = e^{i\theta}$, où θ décrit $\mathbb{R}$

alors $z' = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) = \cos\theta$

(d'après les formules d'Euler) ; $\cos\theta \in \mathbb{R}$ et $-1 \leq \cos\theta \leq 1$

donc M' se situe sur le segment délimité par les points d'affixe -1 et 1. CQFD.