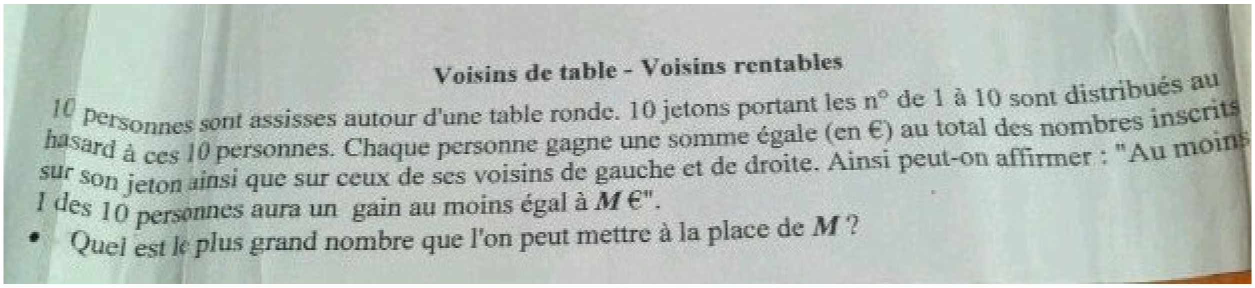
Problème proposé par @coursmpc


Voisins de table - Voisins rentables

10 personnes sont assisses autour d'une table ronde. 10 jetons portant les n° de 1 à 10 sont distribués au hasard à ces 10 personnes. Chaque personne gagne une somme égale (en €) au total des nombres inscrits sur son jeton ainsi que sur ceux de ses voisins de gauche et de droite. Ainsi peut-on affirmer : "Au moins 1 des 10 personnes aura un gain au moins égal à *M* €".

- Quel est le plus grand nombre que l'on peut mettre à la place de *M* ?

Résolution proposée par @cours2maths, à l'aide des contributions de @coursmpc et de @GoutteDeScience.

1. Somme des gains de chaque participants, ou gain total

D'après les pistes données par @coursmpc et @GoutteDeScience.

Appelons a_i le numéro attribué à chaque participant et g_i le gain de chaque participant.
Les joueurs sont numérotés, avec i variant de 1 à 10, consécutivement dans l'ordre d'un tour de table.
D'après l'énoncé, on a :

$g_1 = a_{10} + a_1 + a_2$

$g_i = a_{i-1} + a_i + a_{i+1}$ pour i allant de 2 à 9

$g_{10} = a_9 + a_{10} + a_1$

alors :

$$\sum_{i=1}^{10} g_i = a_{10} + a_1 + a_2 + \sum_{i=2}^{9} (a_{i-1} + a_i + a_{i+1}) + a_9 + a_{10} + a_1$$

$$\sum_{i=1}^{10} g_i = a_{10} + a_1 + a_2 + \sum_{i=2}^{9} a_{i-1} + \sum_{i=2}^{9} a_i + \sum_{i=2}^{9} a_{i+1} + a_9 + a_{10} + a_1$$

$$\sum_{i=1}^{10} g_i = a_{10} + a_1 + a_2 + \sum_{i=1}^{8} a_i + \sum_{i=2}^{9} a_i + \sum_{i=3}^{10} a_i + a_9 + a_{10} + a_1$$

on ordonne

$$\sum_{i=1}^{10} g_i = \left(\sum_{i=1}^{8} a_i + a_9 + a_{10}\right) + \left(a_1 + \sum_{i=2}^{9} a_i + a_{10}\right) + \left(a_1 + a_2 + \sum_{i=3}^{10} a_i\right)$$

$$\sum_{i=1}^{10} g_i = 3\sum_{i=1}^{10} a_i \;=\; 3 \times \frac{(10+1)}{2} \times 10 \;=\; 165$$

D'où il s'ensuit que le gain moyen est égal à : $\frac{165}{10} \;=\; 16{,}5$

2. Parmi les gains maximaux possibles, quel est le minimum M ?

Relevons à ce stade que les gains de chaque participant, et donc M, sont tous des entiers naturels compris entre 6 & 27.
En effet le gain minimal possible est donné par : 1+2+3=6
et le gain maximal possible par : 8+9+10=27.

2.1. Peut-on avoir M≤16,5 ?

Dans une série statistique, le maximum est supérieur ou égal à la moyenne, donc cette hypothèse doit être écartée.

2.2. Peut-on avoir M=17 ?

Supposons qu'il existe une distribution de jetons permettant n et seulement n gains de 17 €.
Nous aurons alors $10-n$ gains tous inférieurs ou égaux à 16 €, car ce sont des entiers.
La somme des gains inférieurs à 17 sera notée S.
L'égalité et l'inégalité suivantes devront alors être vérifiées :
$n\times 17+S=165$
$S\leq 16\times(10-n)$

Étudions une à une chacune des possibilités.

1) Si $n=1$ alors $S=148$ et $S\leq 144$. C'est impossible.

2) Si $n=2$ alors $S=131$ et $S\leq 128$. C'est impossible.

3) Si $n=3$ alors $S=114$ et $S\leq 112$. C'est impossible.

4) Si $n=4$ alors $S=97$ et $S\leq 96$. C'est impossible.

5) Si $n=5$ alors $S=80$ et $S\leq 80$.
Les premières contraintes sont respectées mais nous aurons alors, en plus des 5 gains de 17€, 5 gains dont le maximum et la moyenne sont égaux à 16, donc tous égaux à 16€.
Considérons les joueurs numérotés 5 & 6 (le raisonnement tiendra pour tout couple de joueurs consécutifs mais raisonner sur des joueurs i et i+1 n'est pas aisé parce que le 10 est voisin du 1.
$g_5=a_4+a_5+a_6$ et $g_6=a_5+a_6+a_7$ d'où $g_6-g_5=a_7-a_4$
d'où il découle que $g_6=g_5$ implique $a_7=a_4$ ce qui impossible puisque les numéros de jetons sont tous différents. Deux joueurs voisins ne peuvent donc pas avoir le même gain.

Envisageons alors la seule alternative, à savoir que le tour de table montre une alternance parfaite de gains de 16 et 17€. Posons arbitrairement que :
$g_1=17$ soit $a_{10}+a_1+a_2=17$ (1)
$g_2=16$ soit $a_1+a_2+a_3=16$ (2)
$g_3=17$ soit $a_2+a_3+a_4=17$ (3)
$g_4=16$ soit $a_3+a_4+a_5=16$ (4)
$g_5=17$ soit $a_4+a_5+a_6=17$ (5)
etc.

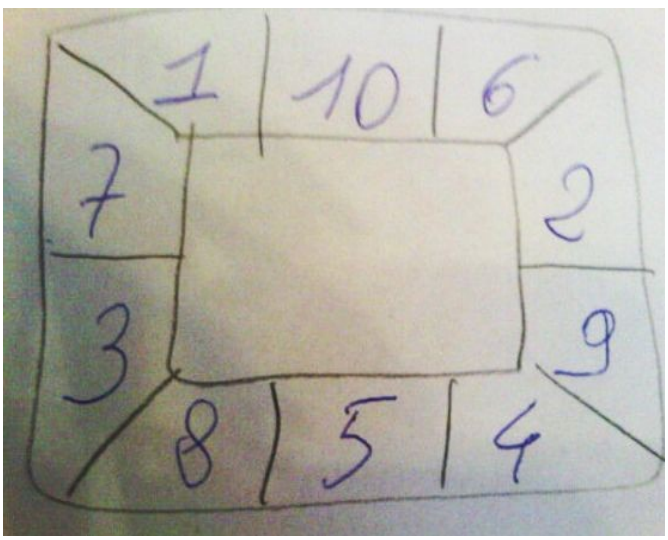
$(2)-(1)$ donne : $a_3-a_{10}=-1$.
$(5)-(4)$ donne : $a_6-a_3=1$.
L'addition de ces deux égalités donne : $a_6-a_{10}=0$.
C'est impossible car tous les jetons sont différents.
La possibilité que n soit égal à 5 est donc exclue.

6) Si $n\geq 6$ alors on est forcé d'envisager qu'au moins deux gains de 17 € soient voisins.
Or il a été démontré plus haut que c'était impossible.

L'hypothèse M=17 est donc exclue.

2.3. Peut-on avoir M=18 ?

@coursmpc a fait la proposition de distribution suivante :



Cette distribution laissant apparaître quatre fois un gain maximum de 18 €, elle suffit désormais à démontrer la proposition suivante :

M=18

autrement dit :

Au moins une des 10 personnes aura un gain au moins égal à 18€.