DS 1.

Terminale S

Exercice 1.

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 1 + 2 + \ldots + n = \sum_{k=1}^{n} k$ et $C_n = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3$.

1) 1. a) Calculer S_1, S_2, S_3, S_4 puis S_5.
1. b) Calculer C_1, C_2, C_3, C_4 puis C_5.
1. c) Que constatez-vous ? Proposez alors une conjecture concernant C_n.
2. a) Donner l'expression de S_n en fonction de n.
2. b) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $C_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
2. c) Déterminer C_{100}.
2. d) Si $[AB]$ est un segment de longueur S_n, comment interprétez-vous géométriquement C_n ?

Exercice 2.

1) Démontrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $1 - x + x^2 > 0$.
2) Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.
2. a) Déterminer $f'(x)$.
2. b) En déduire les variations de f sur $]0, +\infty[$.
3) On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $]0, +\infty[$, par

$$f_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 - \ldots + (-x)^n.$$

3. a) Rappeler, pour tout réel $x \neq 1$, l'expression de $1 + x + x^2 + \ldots + x^n$.
3. b) En déduire que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f_n(x) = \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}$.
4) On suppose que n est un entier pair. On pose $n = 2p$, $p \in \mathbb{N}^*$.
4. a) Démontrer par récurrence que pour $k \in \mathbb{N}^*$, $(-1)^{2k+1} = -1$.
4. b) Donner l'expression de $f_{2p}(x)$.
4. c) En déduire que pour tout $x > 0$, $f_{2p}(x) > 0$
5) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction g_p définies sur $]0, +\infty[$ par

$$g_p(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots - \frac{x^{2p}}{2p} + \frac{x^{2p+1}}{2p+1}.$$

5. a) Verifier que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\left(x \mapsto \frac{x^{2p+1}}{2p+1}\right)'(x) = x^{2p}$.
5. b) Démontrer par récurrence que pour tout $x > 0$, $g_p'(x) = f_{2p}(x)$.
5. c) En déduire que pour tout $x > 0$, $g_p'(x) > 0$.
5. d) En déduire les variations de g_p sur $]0, +\infty[$.

Exercice 3

Cocher la réponse qui vous semble exacte : une réponse juste entraîne 1 point, une réponse fausse entraîne -0,5 points, aucun réponse entraîne 0 points.

1) (u_n) est géométrique de raison $\sqrt{3}$ et de premier terme $u_0 = 2$. u_{15} vaut :
$A)$ ☐ $2\sqrt{3}^{16}$; $B)$ ☐ $15\sqrt{2}^{15}$; $C)$ ☐ $2\sqrt{3}^{15}$.

2) (u_n) est géométrique de raison $\sqrt{3}$ et de premier terme $u_0 = 2$. On a $\sum_{k=1}^{10} u_k =$

$A)$ ☐ $2\sqrt{3}\left(\frac{1-(\sqrt{3})^{10}}{1-\sqrt{3}}\right)$; $B)$ ☐ $\frac{1-(\sqrt{3})^{10}}{1-\sqrt{3}}$; $C)$ ☐ $2\sqrt{3}\left(\frac{1-(\sqrt{3})^{11}}{1-\sqrt{3}}\right)$.

3) L'expression algébrique de $\frac{5+2i}{1-i}$ est :
$A)$ ☐ $\frac{3+7i}{2}$; $B)$ ☐ $\frac{3-7i}{2}$; $C)$ ☐ $2\frac{-3-7i}{2}$.