

## DS 1.

Terminale S

### Exercice 1.

On considère, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n = 1 + 2 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k$  et  $C_n = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \sum_{k=1}^n k^3$ .

- 1) a) Calculer  $S_1, S_2, S_3, S_4$  puis  $S_5$ .
1. b) Calculer  $C_1, C_2, C_3, C_4$  puis  $C_5$ .
1. c) Que constatez-vous ? Proposez alors une conjecture concernant  $C_n$ .
2. a) Donner l'expression de  $S_n$  en fonction de  $n$ .
2. b) Démontrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $C_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ .
2. c) Déterminer  $C_{100}$ .
2. d) Si  $[AB]$  est un segment de longueur  $S_n$ , comment interprétez-vous géométriquement  $C_n$  ?

### Exercice 2.

- 1) Démontrer que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $1 - x + x^2 > 0$ .
- 2) Soit la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ .
2. a) Déterminer  $f'(x)$ .
2. b) En déduire les variations de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ .
- 3) On considère, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $f_n$  définie sur  $]0, +\infty[$ , par

$$f_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 - \dots + (-x)^n.$$

3. a) Rappeler, pour tout réel  $x \neq 1$ , l'expression de  $1 + x + x^2 + \dots + x^n$ .
3. b) En déduire que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $f_n(x) = \frac{1 - (-x)^{n+1}}{1+x}$ .
- 4) On suppose que  $n$  est un entier pair. On pose  $n = 2p$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$ .
4. a) Démontrer par récurrence que pour  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $(-1)^{2k+1} = -1$ .
4. b) Donner l'expression de  $f_{2p}(x)$ .
4. c) En déduire que pour tout  $x > 0$ ,  $f_{2p}(x) > 0$ .
- 5) Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . On considère la fonction  $g_p$  définies sur  $]0, +\infty[$  par

$$g_p(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots - \frac{x^{2p}}{2p} + \frac{x^{2p+1}}{2p+1}.$$

5. a) Vérifier que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $\left(x \mapsto \frac{x^{2p+1}}{2p+1}\right)'(x) = x^{2p}$ .
5. b) Démontrer par récurrence que pour tout  $x > 0$ ,  $g_p'(x) = f_{2p}(x)$ .
5. c) En déduire que pour tout  $x > 0$ ,  $g_p'(x) > 0$ .
5. d) En déduire les variations de  $g_p$  sur  $]0, +\infty[$ .

### Exercice 3

Cocher la réponse qui vous semble exacte : une réponse juste entraîne 1 point, une réponse fautive entraîne -0,5 points, aucune réponse entraîne 0 points.

- 1)  $(u_n)$  est géométrique de raison  $\sqrt{3}$  et de premier terme  $u_0 = 2$ .  $u_{15}$  vaut :

A)   $2\sqrt{3}^{16}$  ; B)   $15\sqrt{2}^{15}$  ; C)   $2\sqrt{3}^{15}$ .

- 2)  $(u_n)$  est géométrique de raison  $\sqrt{3}$  et de premier terme  $u_0 = 2$ . On a  $\sum_{k=1}^{10} u_k =$

A)   $2\sqrt{3} \left( \frac{1 - (\sqrt{3})^{10}}{1 - \sqrt{3}} \right)$  ; B)   $\frac{1 - (\sqrt{3})^{10}}{1 - \sqrt{3}}$  ; C)   $2\sqrt{3} \left( \frac{1 - (\sqrt{3})^{11}}{1 - \sqrt{3}} \right)$ .

- 3) L'expression algébrique de  $\frac{5+2i}{1-i}$  est :

A)   $\frac{3+7i}{2}$  ; B)   $\frac{3-7i}{2}$  ; C)   $2 - \frac{3-7i}{2}$ .