Considérons $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$

Exprimer $f(x+y)$ en fonction de $f(x)$ et $f(y)$.

Résolution

Nous avons bien sûr : $f(y)=\frac{e^y-1}{e^y+1}$ et $f(x+y)=\frac{e^{x+y}-1}{e^{x+y}+1}$

Rappelons que : $e^{x+y}=e^x\times e^y$

Donc : $f(x+y)=\frac{e^x e^y-1}{e^x e^y+1}$

Il me semble que la meilleure façon d'aboutir est d'exprimer e^x et e^y en fonction de $f(x)$ et $f(y)$, respectivement.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{e^x-1}{e^x+1} \\
\Leftrightarrow\ e^x-1 &= (e^x+1)\times f(x) \\
\Leftrightarrow\ e^x-1 &= e^x f(x)+f(x) \\
\Leftrightarrow\ e^x-e^x f(x) &= 1+f(x) \\
\Leftrightarrow\ e^x\left(1-f(x)\right) &= 1+f(x) \\
\Leftrightarrow\ e^x &= \frac{1+f(x)}{1-f(x)}
\end{aligned}
$$

De même, on trouve : $e^y = \frac{1+f(y)}{1-f(y)}$

En remplaçant ces deux expressions dans celle de e^{x+y} :

$$e^{x+y} = e^x\times e^y = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}\times\frac{1+f(y)}{1-f(y)} = \frac{\left(1+f(x)\right)\left(1+f(y)\right)}{\left(1-f(x)\right)\left(1-f(y)\right)} = \frac{1+f(x)+f(y)+f(x)f(y)}{1-f(x)-f(y)+f(x)f(y)}$$

En remplaçant dans celle de $f(x+y)$:

$$f(x+y) = \frac{\frac{1+f(x)+f(y)+f(x)f(y)}{1-f(x)-f(y)+f(x)f(y)}-1}{\frac{1+f(x)+f(y)+f(x)f(y)}{1-f(x)-f(y)+f(x)f(y)}+1}$$

$$f(x+y) = \frac{\dfrac{1+f(x)+f(y)+f(x)f(y)}{1-f(x)-f(y)+f(x)f(y)} - \dfrac{1-f(x)-f(y)+f(x)f(y)}{1-f(x)-f(y)+f(x)f(y)}}{\dfrac{1+f(x)+f(y)+f(x)f(y)}{1-f(x)-f(y)+f(x)f(y)} + \dfrac{1-f(x)-f(y)+f(x)f(y)}{1-f(x)-f(y)+f(x)f(y)}}$$

$$f(x+y) = \frac{\dfrac{2f(x)+2f(y)}{1-f(x)-f(y)+f(x)f(y)}}{\dfrac{2+2f(x)f(y)}{1-f(x)-f(y)+f(x)f(y)}}$$

$$f(x+y) = \frac{2f(x)+2f(y)}{2+2f(x)f(y)}$$

$$f(x+y) = \frac{2\left(f(x)+f(y)\right)}{2\left(1+f(x)f(y)\right)}$$

$$f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$$