Considérons un losange ABCD direct de centre O

tel que AC = 2BD

Posons $OC = \frac{1}{2} AC = \alpha$

On a aussi $BD = \alpha$ et $OD = \frac{1}{2}\alpha$

Le côté du losange a pour longueur AB tel que

$AB^2 = \alpha^2 + \left(\frac{1}{2}\alpha\right)^2$

$AB^2 = \frac{5}{4}\alpha^2$ soit $AB = \frac{\sqrt{5}}{2}\alpha$

Soit s similitude directe telle que

$s : A \longmapsto B$
$s : O \longmapsto C$

Le rapport k et l'angle θ de s vérifient

$$\begin{cases} k = \dfrac{BC}{AO} \\ \theta = (\vec{AO}\,;\vec{BC})\ [2\pi] \end{cases}$$

$k = \dfrac{\frac{\sqrt{5}}{2}\alpha}{\alpha}$

$\boxed{k = \frac{\sqrt{5}}{2}}$

$\tan\theta = \tan(\vec{AO}\,;\vec{BC})$

$= \tan(\vec{AO}\,;\vec{AD})$

$= \frac{OD}{OA} = \frac{1/2\,\alpha}{\alpha}$

$\boxed{\tan\theta = \frac{1}{2}}$

θ pourra être construit à l'aide de sa tangente.

s est donc une similitude directe de centre Ω (pour l'instant non déterminé) d'angle θ et de rapport k.

Il s'agit aussi de la composée, dans un ordre indifférent, d'une rotation de centre Ω et d'angle θ, et d'une homothétie de centre Ω et de rapport k (cf cours).

Considérons ensuite les images de B, C et D.

$s : B \longmapsto B'$
$s : C \longmapsto C'$
$s : D \longmapsto D'$

On peut construire B', C' et D' en utilisant les propriétés caractéristiques.

$* \quad s : \overrightarrow{AB} \longmapsto \overrightarrow{BB'}$ donc $\begin{cases} (\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{BB'}) = \theta \ [2\pi] \\ BB' = \frac{\sqrt{5}}{2} AB \qquad (BB' = k\ AB) \end{cases}$

soit $BB' = \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \alpha = \frac{5}{4} \alpha$

$* \quad s : \overrightarrow{OC} \longmapsto \overrightarrow{CC'}$ donc $\begin{cases} (\overrightarrow{OC} ; \overrightarrow{CC'}) = \theta \ [2\pi] \\ CC' = \frac{\sqrt{5}}{2} OC \end{cases}$

soit $CC' = \frac{\sqrt{5}}{2} \times \alpha$

$CC' = AD$

$A \longmapsto B$
$O \longmapsto C$
$B \longmapsto B'$
$C \longmapsto C'$
$D \longmapsto D'$

$* \quad s : \overrightarrow{OD} \longmapsto \overrightarrow{CD'}$ donc $\begin{cases} (\overrightarrow{OD} ; \overrightarrow{CD'}) = \theta \ [2\pi] \\ CD' = \frac{\sqrt{5}}{2} OD \end{cases}$

soit $CD' = \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{\alpha}{2}$

$CD' = \frac{\sqrt{5}}{4} \alpha = \frac{AB}{2}$

On peut vérifier ces constructions grâce à une écriture complexe de s.

Considérons un plan $(O ; \overrightarrow{OC} ; 2\overrightarrow{OD})$

Dans ce plan, les affixes de A, B, C et D sont :

$a = -1 \quad ; \quad b = -\frac{i}{2} \quad ; \quad c = 1 \quad ; \quad d = \frac{i}{2}$

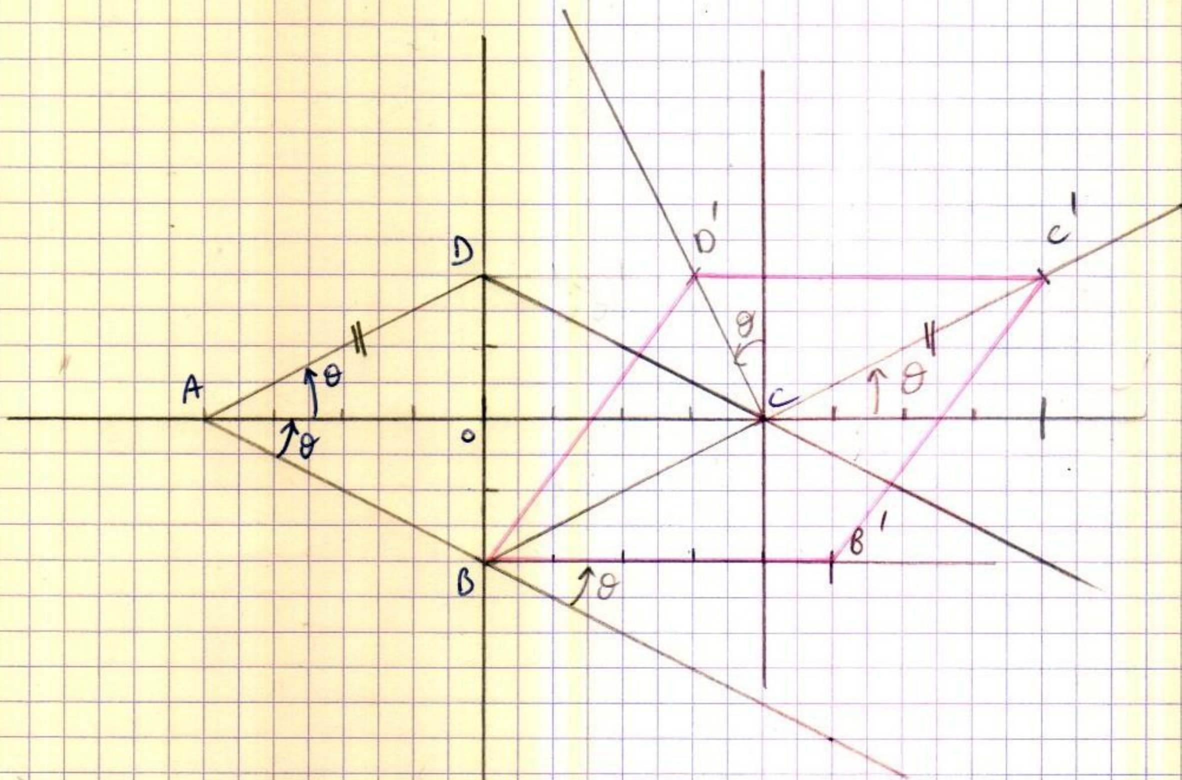
Soit ω l'affixe du centre Ω, z et z' les affixes respectives de M et M'.

on a alors : $z' - \omega = (z - \omega) \times k \times e^{i\theta}$ (cours)

$\Leftrightarrow z' - \omega = (z - \omega) \times \frac{\sqrt{5}}{2} (\cos\theta + i \sin\theta)$

$\Leftrightarrow z' - \omega = (z - \omega) \times \frac{\sqrt{5}}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} + i \times \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \qquad (E)$

$\left(\text{car } \cos\theta = \frac{AO}{AD} = \frac{\alpha}{\frac{\sqrt{5}}{2}\alpha} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{OD}{AD} = \frac{1/2\ \alpha}{\sqrt{5}/2\ \alpha} \right)$



$(E) \iff z' - \omega = (z - \omega)\left(1 + \frac{i}{2}\right)$

On peut calculer ω en utilisant la transfo de O en C (ou de A en B)

$$c - \omega = (0 - \omega)\left(1 + \frac{i}{2}\right)$$

$$\iff 1 - \omega = -\omega\left(1 + \frac{i}{2}\right)$$

$$\iff \left(1 - 1 - \frac{i}{2}\right)\omega = 1$$

$$\iff -\frac{i}{2}\omega = 1$$

$$\iff \omega = -\frac{2}{i} = 2i$$

Ainsi :

$$z' = 2i + (z - 2i)\left(1 + \frac{i}{2}\right)$$

$$= 2i + \left(1 + \frac{i}{2}\right)z - 2i - \frac{2i^2}{2}$$

$$\boxed{z' = \left(1 + \frac{i}{2}\right)z + 1}$$

Les affixes de B', C et D' sont alors respectivement :

$b' = \left(1 + \frac{i}{2}\right)b + 1$

$b' = \left(1 + \frac{i}{2}\right)\left(-\frac{i}{2}\right) + 1$

$b' = -\frac{i}{2} + \frac{1}{4} + 1$

$b' = \frac{5}{4} - \frac{i}{2}$

$c' = \left(1 + \frac{i}{2}\right)c + 1$

$c' = \left(1 + \frac{i}{2}\right) \times 1 + 1$

$c' = 2 + \frac{i}{2}$

$d' = \left(1 + \frac{i}{2}\right)d + 1$

$d' = \left(1 + \frac{i}{2}\right)\left(\frac{i}{2}\right) + 1$

$d' = \frac{i}{2} - \frac{1}{4} + 1$

$d' = \frac{3}{4} + \frac{i}{2}$